数理解析研究所講究録
487巻 1983年 154-162

Torus Fibrationの指数定理

東大理　松本　幸夫 (Yukio Matsumoto)

我々は[2],[3]において、特異ファイバーを許すTorus-Fibration（TF）を導入した。これは複素楕円曲面のC^∞-類似であると同時に、3次元のSeifert fiber空間の4次元的類似をも意図したものである。この稿は、TFを持つ閉じた4次元多様体のSignature（指数、符号数）が、特異ファイバーによって計算出来る事を示すのが目的である。いくつかの具体例につき計算し、応用として、Good TF (cf [3])の存在のための必要条件を与える。この稿の主な内容は[5]にある。

§1. 指数定理

以下，全て，多様体はcompact, oriented, smoothと仮定する。homologicalな交点形式 $H_2(M;\mathbb{Z})\times H_2(M;\mathbb{Z})\longrightarrow \mathbb{Z}$ の符号数（signature）を $\mathrm{Sign}(M)$ と書く事にする。

$i=1,2$ について，T.F $f_i : M_i^4 \to B_i^2$ の中の特異ファイバーを F_i とする．$\{p_i\} = f_i(F_i)$ とする．

定義．F_1 と F_2 が topologically equivalent とは，$\mathrm{Int}(B_1^2)$, $\mathrm{Int}(B_2^2)$ における p_1, p_2 の近傍 U_1, U_2 と，位相同形 $h : U_1 \to U_2$, $H : f_1^{-1}(U_1) \to f_2^{-1}(U_2)$ があって，(i) $h(p_1) = p_2$, (ii) $h \circ f_1 = f_2 \circ H$ が成立つ事である．

$\mathcal{S}$ を特異ファイバーの全ての topological equivalence classes の作る集合とする．$\frac{1}{3}\mathbb{Z}$ で，分母が 3 であるような有理数全体（整数も含む）を表わす．

定理 1．(指数定理)．実際に計算可能な写像 $\sigma : \mathcal{S} \to \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ があって，次の性質を持つ：$f : M^4 \to B^2$ が T.F. で，M^4 は closed とする．その特異ファイバーの全体を $F_1, \cdots, F_r$ とすれば，$\mathrm{Sign}(M) = \sum_{i=1}^{r} \sigma(F_i)$ が成立つ．

もし，一本の特異ファイバー F_0 が，$F_1', \cdots, F_r'$ に（変形を通じて）分裂すれば，$\sigma(F_0) = \sum_{i=1}^{r} \sigma(F_i')$ が成立つ．σ - 数の保存則である．定理 1 に見るように，各々の特異ファイバーは，分数値の signature を持っているようにふるまう．

<u>定理1の証明</u>. 定理1は指数に関するNovikovの和公式とW.Meyer [4] の定理から従う. W.Meyerの定理を, Torus Bundleの場合に復習しよう. $\omega : E \to X$ を連結曲面上のトーラス・バンドルとし, $\partial X = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ とする. C_i にはXからの向きを入れておく. 制限 $E|C_i$ の monodromy 行列を $\alpha_i \in SL(2, \mathbb{Z})$ とすると, α_i の共役類は一意的に定まる. W.Meyer は次のような類関数 $\varphi : SL(2, \mathbb{Z}) \to \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ を導入した.

$$\varphi(\alpha) = -\frac{1}{3}\Phi(\alpha) + \tau(\alpha)\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{sign}\left(\mathrm{Trace}(\alpha)\right)\right)$$

ここに, $\Phi(\alpha)$ は Rademacher の関数で

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{a+d}{c} - 12\,\mathrm{sign}(c)\, s(a,c) - 3\,\mathrm{sign}(c(a+d)) & (c \neq 0) \\ \dfrac{b}{d} & (c = 0) \end{cases}$$

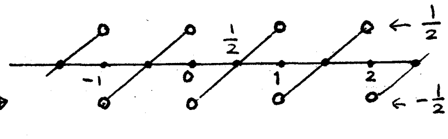
で与えられる. Φ の定義式の右辺の $s(a,c)$ は

$$s(a,c) = \sum_{k \bmod |c|} \left(\!\left(\frac{ak}{c}\right)\!\right)\left(\!\left(\frac{k}{c}\right)\!\right) \qquad (\text{Dedekind sum})$$

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

である.

$((x))$ のグラフ →



また，$\varphi(\alpha)$の定義式の右辺の$\tau(\alpha)$は（Meyerの論文では$\sigma(\alpha)$と書かれているが，この稿では$\sigma(F_i)$とまぎれるのを恐れ，$\tau(\alpha)$と書いた）次で与えられる.

$$\tau\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{Sign}\begin{pmatrix} -c, & \frac{1}{2}(a-d) \\ \frac{1}{2}(a-d), & b \end{pmatrix} \quad \text{（行列の符号数）}$$

さて，Meyerの定理によれば，トーラス・バンドル$E \to X$の全空間EのSign(E)は，

$$\mathrm{Sign}(E) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(\alpha_i)$$

である.（Meyerの論文[4]のSatz 5と符号が反対のように見えるが，彼の論文の$\tau(E, \partial E)$なる量は，実は$-\mathrm{Sign}(E)$であるらしい．[4]の式(4)を参照．実際に計算してみると上の式で良いことがわかる.）

さて我々のT.F.（トーラス・ファイブレーション）の場合にもどり，$f: M^4 \to B^2$を定理1の通りとする．$p_i = f(F_i)$を中心とするB^2中の小閉円板D_iをとり，$N_i = f^{-1}(D_i)$とする．$E = M - \bigcup_{i=1}^{r} N_i$とおけば，Eは，$X = B^2 - \bigcup_{i=1}^{r} D_i$上のトーラス・バンドルである．ここで次の"暗黙の諒解"を確認しておく．つまり，'特異ファイバーのmonodromy'と言っ

た時には、S^1上の torus bundle $\partial\overline{N}_i \to \partial\overline{D}_i$ の monodromy の事を指すが、その場合の$\partial\overline{D}_i$の向きは、$\overline{D}_i$からの向きが入ったものと考えるのである。これは、前々頁に述べた Meyer の定理の中の monodromy α_iの向きとは反対である。従がって、所謂、F_iの monodromy matrix をβ_iとすれば、$\beta_i = \alpha_i^{-1}$である。よって $\mathrm{Sign}(E) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^{r} \varphi(\beta_i)$ となる。（一般に $\varphi(\alpha^{-1}) = -\varphi(\alpha)$ が知られている。… Meyer の論文[4]の公式(42)。）

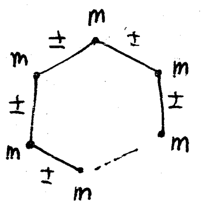
Novikov の和公式から、$\mathrm{Sign}(M) = \left\{\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Sign}(N_i)\right\} + \mathrm{Sign}(E) = \sum_{i=1}^{r} \left\{ \mathrm{Sign}(N_i) - \varphi(\beta_i) \right\}$ であり、$\sigma(F_i) = \mathrm{Sign}(N_i) - \varphi(\beta_i)$ とおけば、求める式 $\mathrm{Sign}(M) = \sum_{i=1}^{r} \sigma(F_i)$ を得る。σ-数の中には、指数の部分 $\mathrm{Sign}(N_i)$ と、monodromy の部分 $-\varphi(\beta_i)$ が混在しているわけである。

§2．計算例．

Normal Crossing のみを singularity とする特異ファイバーについて計算してみよう。これらは $I_0, \widetilde{A}, \widetilde{D}, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$ の6類に分類されるが、更に各 class を細分して、次のような記号で表わす。（$\widetilde{A}$, $\widetilde{D}$, etc. の分類については[2]，[3] 参照）

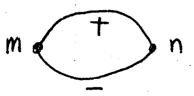
（次頁の図を参照のこと。）次頁の $m\widetilde{A}_{\nu}^{\pm}$, Twin は $\widetilde{A}$ の特殊型であり、これで $\widetilde{A}$ 全部を尽すという意味ではない。

$m\tilde{A}^{\pm}_{\nu}$:

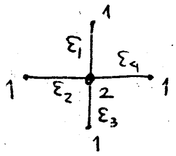


頂点の個数は ν 個, $\nu \geqq 1$
複号同順.

Twin :

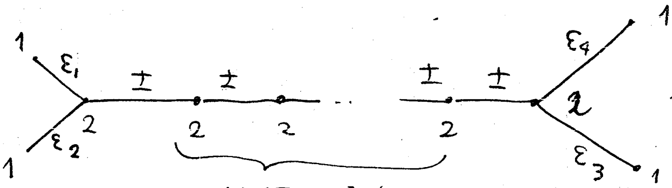


$\tilde{D}_4$:



$\varepsilon_i = +1$ or -1.

$\tilde{D}^{\pm}_{\nu+5}$:



複号同順.

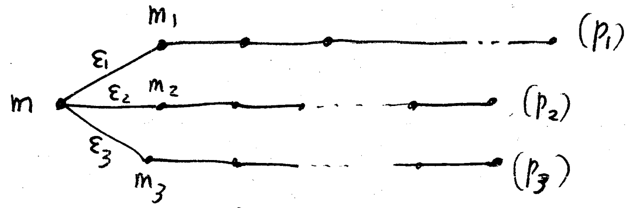
ν 個の頂点, $\nu \geqq 0$.

$\tilde{E}^{\pm}_6$: $\tilde{E}_6$ であって $\varepsilon_3 m_3 \equiv \mp 1 \pmod 3$ のもの.

$\tilde{E}^{\pm}_7$: $\tilde{E}_7$ であって $\varepsilon_3 m_3 \equiv \mp 1 \pmod 4$,

$\tilde{E}^{\pm}_8$: $\tilde{E}_8$ であって $\varepsilon_3 m_3 \equiv \mp 1 \pmod 6$ 　} 複号同順.

最後の3類においては. ε_3. m_3 は下図における符号, 重複度 (multiplicity) を表わす.



ただし. $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ に従がって. それぞれ. $p_3 = 3$, $p_3 = 4$, $p_3 = 6$. である. (p_i の意味については [2] 参照)

定理2. 次の表を得る.

Fの Class		$\sigma(F)$	euler 数 $\chi(F)$
	mI_0	0	0
$\tilde{A}$	$m\tilde{A}^{\pm}_{\nu}$	$\mp\frac{2}{3}\nu$	ν
	Twin	0	2
$\tilde{D}$	$\tilde{D}_4$	$-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)$	6
	$\tilde{D}^{\pm}_{\nu+5}$	$\mp\frac{2}{3}(\nu+1)-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)$	$\nu+7$
	$\tilde{E}^{\pm}_6$	$\pm\frac{2}{3}-\Sigma\varepsilon$	(頂点の個数)+1
	$\tilde{E}^{\pm}_7$	$\pm 1-\Sigma\varepsilon$	〃
	$\tilde{E}^{\pm}_8$	$\pm\frac{4}{3}-\Sigma\varepsilon$	〃

(表中で, $\Sigma\varepsilon$ とあるのは全ての edge にわたる符号の和)

この表を使うか, あるいは Kodairaの表([1]の604頁)を使うと, 複素楕円曲面の特異ファイバーのσ数が次のように計算できる.(下の系における記号 mI_b, mI_b^*, II, etc については[1]参照.)

系2.1. 次を得る.

F	mI_0	mI_b	mI_b^*	II	II*	III	III*	IV	IV*
$\sigma(F)$	0	$-(\frac{2}{3})b$	$-\frac{2}{3}(b+6)$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{20}{3}$	-2	-6	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{16}{3}$

系2.1の表と，mI_0, mI_b, …のeuler数の値（Kodairaの論文IIIにその表がある）を比較すると、複素楕円曲面の特異ファイバーF（但し例外曲線は含まないもの）については常に $\sigma(F) = -\frac{2}{3}\chi(F)$ がなりたつことがわかる．これは，楕円曲面Mについて知られた公式 $\mathrm{Sign}(M) = -\frac{2}{3}\chi(M)$ の局所形と考えられる．

このような事実は，Torus Fibrationには，そのままでは拡張できないが，normal crossing型のsingular fiberについては，次が言える．

定理3　$F = \sum m_i \Theta_i$ をnormal型の特異ファイバーとする．もしself-intersection number $\Theta_i \cdot \Theta_i$ が各々の Θ_i について偶数なら $|\sigma(F)| \leqq \frac{2}{3}\chi(F)$ が成立つ．

定理3は、定理2の各fiberにつき検討することによりわかる．系として次を得る（GTFの定義については[3]参照）

系3.1．$f: M \to B$ がGTFでありMがclosedとする．もし $w_2(M) = 0$ ならば $|\mathrm{Sign}(M)| \leqq \frac{2}{3}\chi(M)$ が成立つ．

これはGTF（good torus fibration）が存在するための

ひとつの必要条件になっている。たとえば、K3曲面Mには GTFがあるが、その連結和 $M' = M \# M$ には、($\mathrm{Sign}(M') = -32$, $\chi(M') = 46$ であるから) GTFが存在しない事がわかる。

文　献

[1]. K. Kodaira : On compact analytic surfaces; II. Ann. of Math., 77, 563–625 (1963).

[2] Y. Matsumoto : On 4-manifolds fibered by tori, Proc. Japan Acad. 58, 298–301 (1982)

[3] ―――――― : Good torus fibrations, preprint, Univ. of Tokyo. Oct. (1982).

[4] W. Meyer : Die Signature von Flächenbündeln, Math. Ann., 201, 239–264 (1973).

[5] Y. Matsumoto : On 4-manifolds fibered by tori; II, (to appear).

<1983 Jan. 27 記>